Ejercicio 1A del Modelo 2 (Ordinario Reserva) de 2021 (Análisis)

Sea la función derivable $f: R \to R$ definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax+b}{x-1} & \text{si } x \le 0 \\ \ln(1+x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

a) Determina a y b. (1'5 puntos)

b) Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2. (1 punto)

Solución

Sea la función derivable $f: R \to R$ definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax+b}{x-1} & \text{si } x \le 0 \\ \ln(1+x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

a)

Determina a y b.

Como la función es derivable en R, es continua en R; en particular en continua y derivable en x = 0.

Como f(x) es continua en x = 0 tenemos $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

$f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{ax+b}{x-1} = b/-1 = -b$. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln(1+x) = \ln(1) = 0$.

De $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$, tenemos -b = 0, de donde **b = 0**.

Como f(x) es derivable en x = 0 tenemos $f'(0-) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = f'(0+) = \lim_{x\to 0^+} f'(x)$, veremos la continuidad de la derivada.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax}{x-1} & \text{si } x \le 0 \\ \ln(1+x) & \text{si } x > 0 \end{cases}, \quad f'(x) = \begin{cases} \dfrac{a\cdot(x-1) - ax\cdot 1}{(x-1)^2} & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{-a}{(x-1)^2} & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f'(0-) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{-a}{(x-1)^2} = -a/1 = -a$. $f'(0+) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{1+x} = 1/1 = 1$.

De $f'(0-) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = f'(0+) = \lim_{x\to 0^+} f'(x)$, tenemos **-a = 1**, de donde **a = -1**.

b)

Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2.

Tenemos $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x-1} & \text{si } x \le 0 \\ \ln(1+x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$, $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ donde f(2) = ln(3) y f '(2) = 1/3.

La recta tangente en x = 2 es "y - f(2) = f '(2)(x - 2)", es decir **y - ln(3) = (1/3)·(x - 2)**.

La recta normal en x = 2 es "y - f(2) = [-1/f '(2)]·(x - 2)", es decir **y - ln(3) = -3·(x - 2)**. .

Ejercicio 2A del Modelo 2 (Ordinario Reserva) de 2021 (Análisis)

Halla a, b y c sabiendo que la función $f: R \to R$ dada por f(x) = a + b·sen(x) + c·sen(2x) tiene un punto crítico en el punto de abscisa $x = \pi$ y la recta y = -x/2 + 3 es normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x=0.

Solución

La función f(x) = a + b·sen(x) + c·sen(2x) tiene un punto crítico en $x = \pi$, luego **f '(π) = 0**.

La recta normal a su gráfica en el punto de abscisa x = 0 es y = -x/2 + 3.

Tenemos f(x) = a + b·sen(x) + c·sen(2x) y f '(x) = b·cos(x) + 2c·cos(2x)

De f '(π) = 0 → f '(π) = b·cos(π) + 2c·cos(2π) = 0 → **-b + 2c = 0**.

La recta normal en x = 0 es "y - f(0) = [-1/f '(0)]·(x - 0)". Tenemos f(0) = a + b·sen(0) + c·sen(0) = a y

$f'(0) = b\cdot\cos(0) + 2c\cdot\cos(0) = b + 2c$.

La recta normal en $x = 0$ es $y - a = [-1/(b + 2c)]\cdot(x - 0)$ es decir $y = -x/(b + 2c) + a = -x/2 + 3$. Igualando miembro a miembro tenemos $\mathbf{a = 3}$ y $\mathbf{b + 2c = 2}$.

Resolviendo $\begin{cases} -b + 2c = 0 \\ b + 2c = 2 \end{cases}$ tenemos $4c = 2$, de donde $\mathbf{c = 1/2}$, y $\mathbf{b} = 2 - 2(1/2) = \mathbf{1}$.

Los valores pedidos son a = 3, b = 1 y c = 1/2.

Ejercicio 3A del Modelo 2 (Ordinario Reserva) de 2021 (Análisis)

Considera la función $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (\ln(x))^2$ (ln denota la función logaritmo neperiano).
a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f, así como sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan). (1 punto)
b) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función f y las rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = e$.
(1'5 puntos)

Solución

Considera la función $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (\ln(x))^2$ (ln denota la función logaritmo neperiano).
a)
Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f, así como sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Estudiamos su monotonía, estudio de la 1ª derivada $f'(x)$.

Tenemos $f(x) = (\ln(x))^2$, y su derivada es $f'(x) = 2\cdot(\ln(x))\cdot(1/x)$.
Recordamos que los extremos anulan la primera derivada.

De $f'(x) = 0$, tenemos $2\cdot\ln(x) = 0 \to \ln(x) = 0$ de donde $x = e^0 = 1$, que será el posible extremo.

Como $f'(0'5) = 2\cdot(\ln(0'5))\cdot(1/0'5) = 4\cdot\ln(0'5) \cong -2'77 < 0$, luego **f(x) es estrictamente decreciente** $(\searrow)$ **en el intervalo (0, 1).**
Como $f'(2) = 2\cdot(\ln(2))\cdot(1/2) = \ln(2) \cong 0'69 > 0$, luego **f(x) es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en (1, +∞).**
Por definición en **x = 1 hay un mínimo relativo que vale $f(1) = (\ln(1))^2 = 0$.**
b)
Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función f y las rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = e$.

Calculamos primero la integral indefinida.

$$I=\int (\ln(x))^2 dx = \left\{ \begin{array}{l} u=(\ln(x))^2 \Rightarrow \; du=\dfrac{2\cdot\ln(x)dx}{x} \\ dv=dx \quad \Rightarrow \; v=\int dx = x \end{array} \right\} = (\ln(x))^2\cdot x - \int x\cdot\frac{2\cdot\ln(x)dx}{x} = x\cdot(\ln(x))^2 - 2\cdot\int \ln(x)dx = x\cdot(\ln(x))^2 - 2\cdot I_1$$

$$I_1=\int \ln(x)dx = \left\{ \begin{array}{l} u=\ln(x) \quad \Rightarrow du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=dx \quad \Rightarrow v=\int dx=x \end{array} \right\} = \ln(x)\cdot x - \int x\cdot\frac{dx}{x} = x\cdot\ln(x) - \int dx = x\cdot\ln(x) - x.$$

Luego $I = \int (\ln(x))^2 dx = x\cdot(\ln(x))^2 - 2\cdot I_1 = x\cdot(\ln(x))^2 - 2\cdot(x\cdot\ln(x) - x) + K = x\cdot(\ln(x))^2 - 2x\cdot\ln(x) + 2x + K$

Como $f(1) = 0$ y en $(1, +\infty)$ tenemos que f(x) es estrictamente creciente.

Área $= \int_1^e (\ln(x))^2 dx = \left[x\cdot(\ln(x))^2 - 2x\cdot\ln(x) + 2x \right]_1^e =$ $\mathbf{(e\cdot(\ln(e))^2 - 2e\cdot\ln(e) + 2e) - (0 - 0 + 2)\ u^2 =}$
$\mathbf{= (e - 2)\ u^2 \cong 0'718928\ u^2}$.

Ejercicio 4A del Modelo 2 (Ordinario Reserva) de 2021 (Análisis)

Calcula $\int_0^2 \frac{1}{1 + \sqrt{e^x}} dx$. (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t = \sqrt{e^x}$)

Solución

Calculamos primero la integral indefinida:

$$I = \int \frac{1}{1+\sqrt{e^x}}dx = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{e^x} = t;\ e^x = t^2;\ x = \ln(t^2) \\ x = 2\ln(t);\ dx = \dfrac{2dt}{t} \end{array} \right\} = \int \frac{1}{1+t}\cdot\frac{2\cdot dt}{t} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integral} \\ \text{racional} \end{array} \right\} = \int \frac{2dt}{t\cdot(t+1)} = \int \frac{Adt}{t} + \int \frac{Bdt}{t+1} =$$

$$= A\cdot\ln|t| + B\ln|t+1| + K = A\cdot\ln(\sqrt{e^x}) + B\cdot\ln(\sqrt{e^x}+1) + K = A\cdot\ln(e^x)^{1/2} + B\cdot\ln(\sqrt{e^x}+1) + K =$$

$$= \frac{A}{2}\cdot x + B\cdot\ln(\sqrt{e^x}+1) + K = \{+++\} = \frac{2}{2}\cdot x - 2\cdot\ln(\sqrt{e^x}+1) + K = x - 2\cdot\ln(\sqrt{e^x}+1) + K$$

{+++} Calculamos A y B

$$\frac{2}{t\cdot(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} = \frac{A(t+1) + B\cdot t}{t\cdot(t+1)}$$

Igualando numeradores:

$2 = A\cdot(t+1) + B\cdot t$. Sustituimos “t” por el valor de las raíces del denominador.
Para $t = 0$, $2 = A(1) \rightarrow A = 2$.
Para $t = -1$, $2 = B(-1) \rightarrow B = -2$.

Luego $\int_0^2 \frac{1}{1+\sqrt{e^x}}dx = \left[x - 2\cdot\ln(\sqrt{e^x}+1)\right]_0^2 =$ **$(2 - 2\cdot\ln(\sqrt{(e^2)} + 1)) - (0 - 2\cdot\ln(\sqrt{(e^0)} + 1)) =$**

$= 2 - 2\cdot\ln(e + 1) + 2\cdot\ln(2)$.

Ejercicio 5B del Modelo 2 (Ordinario Reserva) de 2021 (Álgebra)

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ 3x - y - 2z = 0 \\ -x + 2y + mz = 0 \end{array} \right.$.

a) Calcula m para que el sistema tenga infinitas soluciones y hállalas. (1’5 puntos)
b) Para m = 2, ¿existe alguna solución tal que z = 1? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. (1 punto)

Solución

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ 3x - y - 2z = 0 \\ -x + 2y + mz = 0 \end{array} \right.$.

a)
Calcula m para que el sistema tenga infinitas soluciones y hállalas.

Como el sistema es homogéneo tiene infinitas soluciones si el determinante de la matriz de los coeficientes es cero.

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & m \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & m & 0 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes para ver para que valores de m hace cero dicho determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & m \end{vmatrix} F_2+F_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & m \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{segunda} \\ \text{fila} \end{array} = -(4)\cdot(m - 4)$$

Si $|A| = 0$, tenemos $-(4)\cdot(m - 4) = 0$, de donde $m = 4$.

Si m = 4, rango (A) = rango(A^*) = 2 < nº de incógnitas, y por el Teorema de Rouchè **el sistema es compatible e indeterminado y tiene más de una solución (infinitas)**.
Como el rango es dos, con dos ecuaciones es suficiente, la primera y la segunda:

Tenemos $\left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ 3x - y - 2z = 0\ (E_2+E_1) \end{array} \right. \approx \left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ 4x \quad\quad = 0 \end{array} \right.$, de donde x = 0 y tomando $z = b \in R$, $y = -2b$, y **las infinitas soluciones del sistema son: (x, y, z) = (0, -2b, b) con $b \in$ R.**

Piden una solución con x = 0, lo cual es imposible pues “x” vale siempre 2/5.

Como el rango es dos, con dos ecuaciones es suficiente, la primera y la tercera:

Tenemos $\begin{cases} 2y - z = 1 \\ x = 2/5 \end{cases}$, tomando $y = b \in R$, $z = -1 + 2b$, y **las infinitas soluciones del sistema son:**

(x, y, z) = (2/5, b, -1 + 2b) con b∈ R.

b)

Para m = 2, ¿existe alguna solución tal que z = 1? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

Si m = 2, |A| = -(4)·(2 - 4) **= 8 ≠ 0 y rango (A) = rango(A*) = 3 = nº de incógnitas, y** por el Teorema de Rouchè **el sistema es compatible y determinado y tiene una única solución, la trivial (x, y, z) = (0, 0, 0) con lo cual no existe ninguna solución con z = 1.**

Ejercicio 6B del Modelo 2 (Ordinario Reserva) de 2021 (Álgebra)

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, con determinante igual a 2.

a) Calcula razonadamente el determinante $\left|\frac{1}{3}A^{-1}A^t\right|$. (0'5 puntos)

b) Calcula razonadamente los determinantes $\begin{vmatrix} 6c & 2b & 2a \\ 3f & e & d \\ 9 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 2a-2b & c & b \\ 2d-2e & f & e \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$. (2 puntos)

Solución

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, con determinante igual a 2.

(a)

Calcula razonadamente el determinante $\left|\frac{1}{3}A^{-1}A^t\right|$.

$\left|\frac{1}{3}A^{-1}A^t\right|$ = {i} = $(1/3)^3\cdot|A^{-1}A^t|$ = {v} = $(1/3)^3\cdot|A^{-1}|\cdot|A^t|$ = {ii y vi} = $(1/3)^3\cdot(1/|A|)\cdot|A|$ **= $(1/3)^3$ = 1/27**.

(b)

Calcula razonadamente los determinantes $\begin{vmatrix} 6c & 2b & 2a \\ 3f & e & d \\ 9 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 2a-2b & c & b \\ 2d-2e & f & e \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$. (2 puntos)

Tenemos $\begin{vmatrix} 6c & 2b & 2a \\ 3f & e & d \\ 9 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ = (iii) = $3\cdot\begin{vmatrix} 2c & 2b & 2a \\ f & e & d \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ = (iii) = $3\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ **= -6·2 = -12**.

$$\begin{vmatrix} 2a-2b & c & b \\ 2d-2e & f & e \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} C_1+2C_3 = \{iv\} = \begin{vmatrix} 2a & c & b \\ 2d & f & e \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \{iii\} = 2\cdot\begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \{vii\} = -2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \mathbf{= -2\cdot 2 = -4}.$$

Propiedades usadas:

(i) Sabemos que $\det(k\cdot A_n) = (k)^n\cdot\det(A_n)$.

(ii) Sabemos que $\det(A) = \det(A^t)$.

(iii) Si una fila (columna) de un determinante esta multiplicada por un número, dicho número sale fuera multiplicando a todo el determinante.

(iv) Si una fila (columna) de un determinante se le suma otra fila (columna) multiplicada por cualquier número, el determinante no varía.

(v) Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden entonces det(A·B) = det(A)·det(B).

(vi) $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

(vii) Si intercambiamos dos filas (columnas) de un determinante, el determinante cambia de signo.

Ejercicio 7B del Modelo 2 (Ordinario Reserva) de 2021 (Geometría)

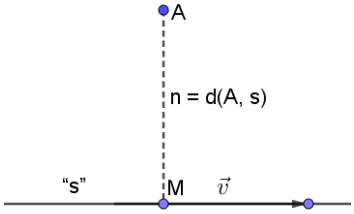
Considera las rectas $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$ y $s \equiv \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - y - z = -4 \end{cases}$. Sabiendo que dos de los lados de un cuadrado están en las rectas r y s, calcula su área.

Solución

De $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$ un punto es A(0, -2, 1) y un vector director **u** = (1, 2, 1).

De $s \equiv \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - y - z = -4 \; (E_2+E_1) \end{cases} \approx \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 4x - 2y = -2 \end{cases} \approx \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$, tomando x = b ∈ R, y = 1 + 2b y entrando en la 1ª, (b) - (1 + 2b) + z = 2 → z = 3 + b, su ecuación vectorial es s ≡ (x, y, z) = (b, 1 + 2b, 3 + b), con lo cual un punto es B(0, 1, 3) y un vector director **v** = (1, 2, 1).

El lado del cuadrado es n = d(r, s) = d(A, r) = ||**AM**||, y su área es n^2.



Calculamos la proyección ortogonal del punto A sobre la recta "s", para lo cual tomamos el punto genérico M de la recta "s", formamos el vector **AM**, y le imponemos la condición de perpendicularidad a dos vectores, uno el **AM** y otro el director **v** de la recta "s". Obtenemos el punto M, y la distancia del punto A a la recta "s" será el módulo del vector **AM**. A(0, -2, 1)

Punto genérico de la recta "s", M(b, 1 + 2b, 3 + b), formamos el vector **AM** = (b, 3 + 2b, 2 + b), le imponemos la condición de que sea perpendicular a la recta "s" es decir a su vector de dirección **v** = (1, 2, 1), por tanto **AM•v** = 0 → (b, 3 + 2b, 2 + b)•(1, 2, 1) = 0 = b + 6 + 2b + 2 + b = 0, de donde 4b = -8, es decir **b = -2** y M es M((-2), 1 + 2(-2), 3 + (-2)) = M(-2, -3, 1); y el vector **AM** es **AM** = ((-2), 3 + 2(-2), 2 + (-2)) = (-2, -1, 0)

La distancia pedida es n = ||AM||| = $\sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2}$ u^1 = $\sqrt{3}$ u^1 y el área del cuadrado es n^2 = 3 u^2.

Ejercicio 8B del Modelo 2 (Ordinario Reserva) de 2021 (Geometría)

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + m\lambda \end{cases}$ y $r \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ x + z = 2 \end{cases}$.

a) Estudia la posición relativa de r y s según los valores de m. (1'5 puntos)
b) Para m = 1, calcula el coseno del ángulo que forman las rectas r y s. (1 punto)

Solución

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + m\lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ x + z = 2 \end{cases}$.

a)
Estudia la posición relativa de r y s según los valores de m.

De r un punto es A(1, 1, 2) y un vector director es **u** = (1, 1, m).

En s tomando z = 0, sale x = 2 e y = -1 y un punto es B(2, -1, 0) y un vector director **v**= $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila =

= **i**(-1-0) - **j**(1-2) + **k**(0+1) = (-1, 1, 1).
Como los vectores **u** = (1, 1, m) y **v** = (-1, 1, 1) no son proporcionales, las rectas **r y s no son paralelas** y tenemos que estudiar el determinante det(**AB**, **u**, **v**). Si es cero se cortan y si es distinto de cero se cruzan

Como **AB** = (1, -2, -2), resulta det(**AB**, **u**, **v**) = $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & m \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_1+F_3 \\ F_2+F_3 \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & m+1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera columna =

= +(-1)·(-m - 1 + 2) = m - 1.

Si m = 1, det(**AB**, **u**, **v**) **= 0 y las rectas r y s se cortan.**

Si m $\neq$ 1, det(**AB**, **u**, **v**) $\neq$ **0 y las rectas r y s se cruzan.**
b)
Para m = 1, calcula el coseno del ángulo que forman las rectas r y s. (1 punto)

Para m = 1 tenemos **u** = (1, 1, 1) y **v** = (-1, 1, 1)

Sabemos que el ángulo que forman dos rectas es el menor de los ángulos que forman sus vectores de dirección con un origen común, es decir cos(<r, s>) = **|**cos(<**u**, **v**>)**|**, para lo cual tomamos el valor absoluto del coseno y nos aseguramos de que el ángulo es el menor y no supera lo 90º sexagesimales.

cos(α) = cos(<r, s>) = **|**cos(<**u**, **v**>)**|** = $\left|\frac{\vec{u}\bullet\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}\right|$, de donde α = arcos$\left(\left|\frac{\vec{u}\bullet\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}\right|\right)$

u = (1, 1, 1) y **v** = (-1, 1, 1)
u•v = -1 + 1 + 1 = 1; **||u||** = $\sqrt{(1^2 + 1^2 + 1^2)} = \sqrt{(3)}$; **||v||** = $\sqrt{(1^2 + 1^2 + 1^2)} = \sqrt{(3)}$

Luego el coseno pedido es: cos(α) = cos(r, s) = cos(<u, v>)| = $\left|\frac{\vec{u}\bullet\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \cong$ **0'333333**.